Getallenrepresentatie

Processen en Processoren
7 februari 2012

Vrijwilligers voor dinsdagmiddag

- werkcollege
  ca. 17 studenten dinsdagmiddag 15.45,
  ca. 33 studenten woensdagochtend 10.45

bonusregeling

- Als je vijf van de zeven wekelijkse huiswerkopgaven goed maakt,
  krijg je +1 bonus op het tentamencijfer.
- goed maken := 60% van de sommen correct

Wat is een getal?

- Getallen zitten in je hoofd
  - (of in Plato’s ideeënwereld)
- Een getallenrepresentatie is nodig om erover te praten / schrijven / ze op te slaan

Platos getallen

Plato 428/7–347 v.Chr.

- Ideeënwereld
  - beter, mooier, reëler dan de materiële wereld
  - eeuwig en onveranderlijk
- Getallen (en andere wiskundige objecten) zijn ereburgers van de ideeënwereld
- wiskundigen ontdekken de wiskunde

L.E.J. Brouwer 1881–1966

Brouwers getallen

- Getallen (en andere wiskundige objecten) zitten in je hoofd

- wiskundigen construeren de wiskunde:
  objecten bestaan alleen
  als je er behoorlijk over hebt nagedacht

- niet-constructieve bewijzen zijn zinloos
- voordeel voor informatica:
  constructieve bewijzen leveren algoritmen op

Wat is een getal?

- Getallen zitten in je hoofd
  - (of in Plato's ideeënwereld)
- Een getallenrepresentatie is nodig om erover te praten / schrijven / ze op te slaan

Mogelijke getallenrepresentaties

I II III

Mogelijke getallenrepresentaties

א ב ג

Mogelijke getallenrepresentaties

१   २   ३

Mogelijke getallenrepresentaties

1 2 3

Mogelijke getallenrepresentaties

- standaard in het dagelijks leven:
  cijfers, (meestal) decimaal stelsel

- standaard in de computer:
  bitpatronen, altijd binair stelsel

Grondtallen-stelsels: decimaal

- algemeen schema voor getallenrepresentatie:

$$\ldots\ d_2\ d_1\ d_0\ ,\ d_{-1}\ d_{-2}\ \ldots$$

- waarde in decimale representatie:

$$10^2 d_2 + 10^1 d_1 + 10^0 d_0 + 10^{-1} d_{-1} + 10^{-2} d_{-2}$$

- Radix of grondtal = 10

Grondtallen-stelsels: binair

- algemeen schema voor getallenrepresentatie:

$$\ldots\ d_2\ d_1\ d_0\ ,\ d_{-1}\ d_{-2}\ \ldots$$

- waarde in binaire representatie:

$$2^2 d_2 + 2^1 d_1 + 2^0 d_0 + 2^{-1} d_{-1} + 2^{-2} d_{-2}$$

- Radix of grondtal = 2

Veel gebruikte stelsels

naam	grondtal	gebruik
decimaal	10	dagelijks leven
binair	2	computergeheugen
octaal	8	spreken over computers
hexadecimaal	16	spreken over computers
sexagesimaal	60	minuten, seconden
vigesimaal	20	1 £ = 20 s (tot 1971)
duodecimaal	12	1 s = 12 d (tot 1971)

Omrekenen

- Algemene methode:
  delen door het gewenste grondtal, met rest
  - Voorbeeld: 21_{dec} in binair.
- ander stelsel → decimaal:
  tel de machten bij elkaar op
  - Voorbeeld: $1\ 1101\ 0001_{bin}$ in decimaal.
- binair ↔ octaal of hexadecimaal:
  per cijfer omzetten
  - Voorbeeld: $1\ 1101\ 0001_{bin}$ in octaal.

Rekenen met binaire getallenrepresentatie

- bijna als schriftelijk optellen / aftrekken
  – voorbeeld: $81_{dec} + 54_{dec}$

- 0+0 = 0
  0+1 = 1+0 = 1
  1+1 = 0 en 1 onthouden
  1+1+1 = 1 en 1 onthouden

- 1–0 = 1
  1–1 = 0–0 = 0
  0–1 = 1 en 1 lenen
  0–1–1 = 0 en 1 lenen

Beperkt geheugen

- er zijn oneindig veel getallen
- er zijn oneindig veel getallenrepresentaties

- geheugen van een computer is beperkt
  → beperkt aantal
  onderscheidbare representaties

gelijkheid modulo *n*

- Twee getallen zijn **gelijk modulo *n*** als hun rest na deling door *n* hetzelfde is.

- voorbeelden:

$$
\begin{aligned}
60 &\equiv 42 \pmod{6}\\
13 &\equiv 6 \pmod{7}\\
405 &\equiv 1429 \pmod{256}\\
-1 &\equiv 255 \pmod{256}
\end{aligned}
$$

restklasse modulo *n*

- Een **restklasse modulo *n*** is een verzameling van alle getallen die gelijk modulo *n* zijn.

- voorbeelden:
  - $[0]_6 = \{ 0, 6, 42, 60, -6, \ldots \}$ restklasse modulo 6
  - $[1]_6 = \{ 1, 7, 13, -5, \ldots \}$ restklasse modulo 6
  - $[405]_{256} = \{ 149, 405, 661, 1429, -103, \ldots \}$ restklasse modulo 256

operaties met restklassen

- operaties op gehele getallen uitbreiden naar restklassen:
  - kies een voorbeeldgetal/representant (:= een element uit de restklasse)
  - voer de operatie op het voorbeeldgetal uit
  - neem de restklasse van het resultaat
- vereist bewijs dat de resultaat-restklasse niet van het voorbeeldgetal afhangt

bijna hetzelfde woord

- getallenrepresentatie:
  systeem van waarneembare symbolen
  (om over getallen te communiceren)
  - voorbeeld: א, ב, ג

- representant van een restklasse:
  voorbeeldgetal uit de restklasse
  - voorbeeld: –1 is een representant van
    $[255]_{256} = \{ -1, -257, 255, 511, 767, \ldots \}$

additie met restklassen

- restklassen modulo 6:
  { 0, 6, 12, ... } + { 1, 7, 13, ... } = ?
  - kies voorbeeldgetallen, b.v. 12 en 13
  - addeer de voorbeeldgetallen; resultaat is 25
  - neem de restklasse $[25]_6 = [1]_6$
  - Dus: $[0]_6 + [1]_6 = [1]_6$
  - Nog te bewijzen: andere voorbeeldgetallen leveren dezelfde resultaat-restklasse op ✔

een verzameling
van verzamelingen

restklassenring

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:= verzameling van restklassen modulo n
- b.v. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{ [0]_6, [1]_6, \ldots, [5]_6 \}$

- Een **ring** is een verzameling
  met operaties +, – en ×
- Een **lichaam** is een ring met ÷
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is een ring (en soms een lichaam)

Voorbeeld: $\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$

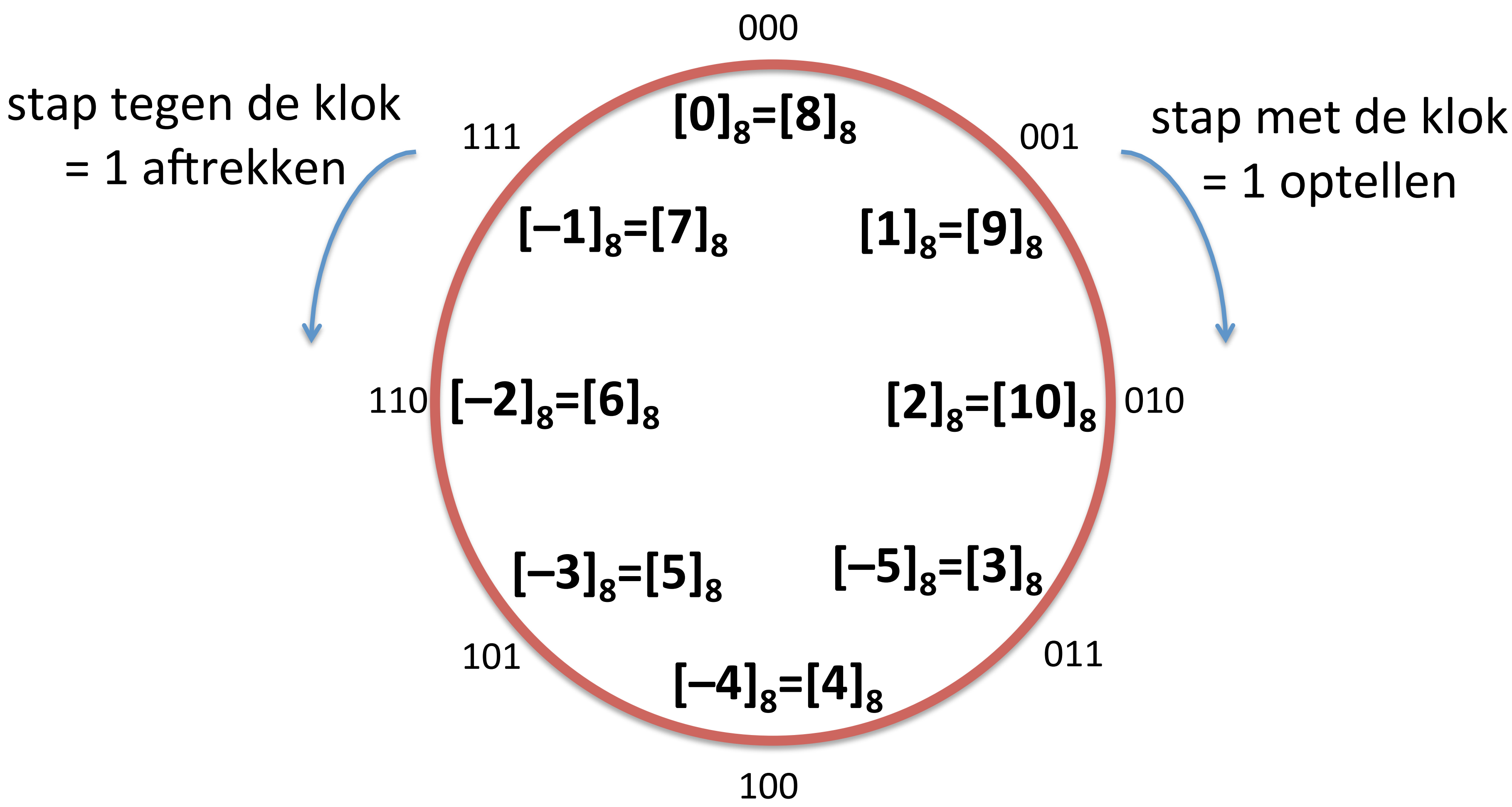
- $[0]_{1000} = \{ 0, 1000, 2000, -1000, -2000, \ldots \}$
- $[501]_{1000} + [630]_{1000} =$
- $[27]_{1000} - [13]_{1000} =$
- $[75]_{1000} \cdot [821]_{1000} \quad =$
- $[460]_{1000} \,/\, [52]_{1000} \quad =$

Hoe rekenen computers?

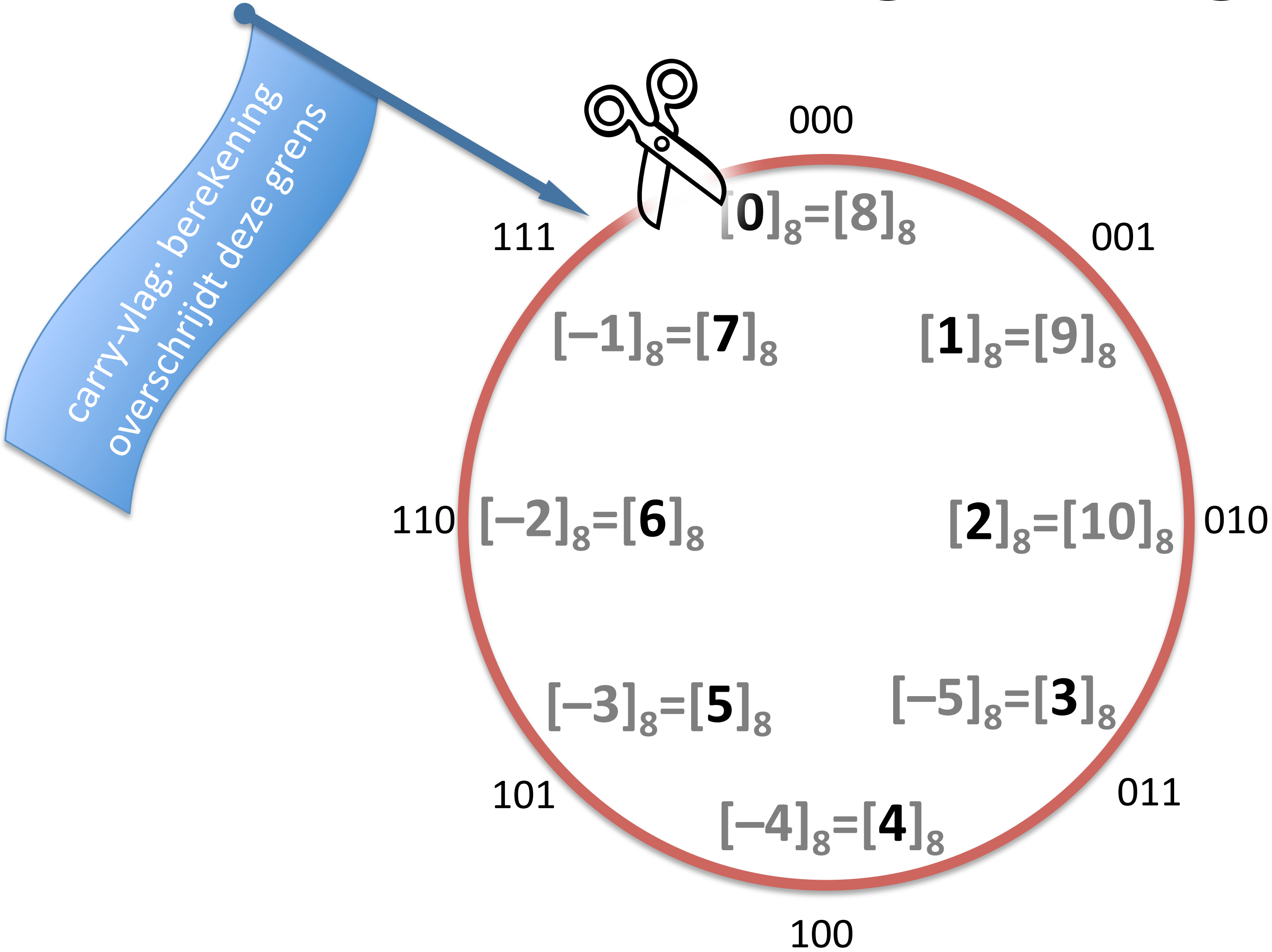
- restklassen modulo 2^8, 2^{16}, 2^{32} of 2^{64}

- aanpassingen om het meer te laten lijken op rekenen met kleine getallen
  - niet-negatieve getallen of
    getallen in twee-complement
  - multiplicatie en divisie
  - vlaggen: carry, overflow (later)

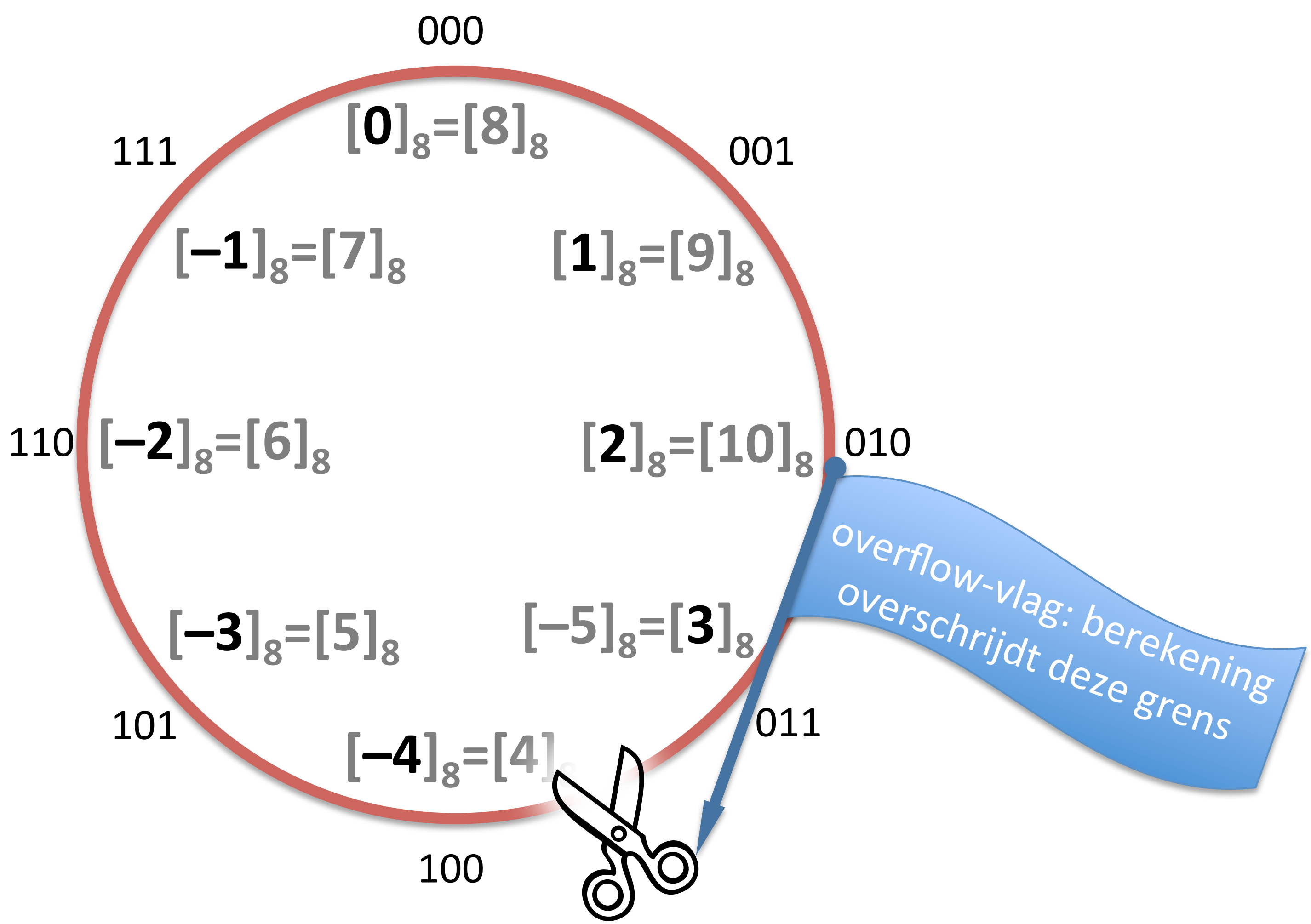
Cirkel van bitpatronen



~~Cirkel van~~ niet-negatieve getallen



~~Cirkel van~~ twee-complement



Twee-complement

- k bits voor getallenrepresentatie
  - in gewone representatie: getallen $0 \ldots 2^k - 1$
  - in twee-complement:
    eerste helft als gewoonlijk,
    tweede helft voor negatieve getallen

    in plaats van $2^{k-1} \ldots 2^k - 1$: $-2^{k-1} \ldots -1$
  - bitpatronen met hoogste bit 1
    = negatieve getallen

Voordelen van twee-complement

- Eenvoudig rekenen voor de computer
  - optellen en aftrekken (in de cirkel)
    werkt net als bij gewone representatie
  - eenvoudige test op negatief getal
    (daarom –4 en niet 4)
  - slechts één representatie van 0

  - voorbeelden

additie in de computer

- *k*-bit-patroon heeft drie betekenissen:
  - restklasse modulo 2^k
  - niet-negatief getal $\{ 0, \ldots, 2^k-1 \}$
  - getal in twee-complement $\{ -2^{k-1}, \ldots, 2^{k-1}-1 \}$

- additie werkt correct met restklassen
- soms is resultaat incorrect
  voor andere betekenissen

addeertabel voor restklassen

+	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$
$[0]_8$	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$
$[1]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$	$[0]_8$
$[2]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$	$[0]_8$	$[1]_8$
$[3]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$
$[4]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$
$[5]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$
$[6]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$
$[7]_8$	$[7]_8$	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$

addeertabel voor bitpatronen

+	000	001	010	011	100	101	110	111
000	000	001	010	011	100	101	110	111
001	001	010	011	100	101	110	111	000
010	010	011	100	101	110	111	000	001
011	011	100	101	110	111	000	001	010
100	100	101	110	111	000	001	010	011
101	101	110	111	000	001	010	011	100
110	110	111	000	001	010	011	100	101
111	111	000	001	010	011	100	101	110

addeertabel
voor niet-negatieve getallen

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

addeertabel
voor niet-negatieve getallen

carry-vlag: resultaat is eigenlijk een ander getal uit dezelfde restklasse

+	0	1	2	3	4	5	[illegible]	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

addeertabel
voor getallen in twee-complement

+	0	1	2	3	−4	−3	−2	−1
0	0	1	2	3	−4	−3	−2	−1
1	1	2	3	−4	−3	−2	−1	0
2	2	3	−4	−3	−2	−1	0	1
3	3	−4	−3	−2	−1	0	1	2
−4	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
−3	−3	−2	−1	0	1	2	3	−4
−2	−2	−1	0	1	2	3	−4	−3
−1	−1	0	1	2	3	−4	−3	−2

addeertabel
voor getallen in twee-complement

overflow-vlag: resultaat is eigenlijk een ander getal uit dezelfde restklasse

	0	1	2	3	−4	−3	−2	−1
0	0	1	2	3	−4	−3	−2	−1
1	1	2	3	−4	−3	−2	−1	0
2	2	3	−4	−3	−2	−1	0	1
3	3	−4	−3	−2	−1	0	1	2
−4	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
−3	−3	−2	−1	0	1	2	3	−4
−2	−2	−1	0	1	2	3	−4	−3
−1	−1	0	1	2	3	−4	−3	−2

Multiplicatie

- multiplicatie van restklassen: eenduidig

- multiplicatie van getallen $\in \{ 0, 1, ..., 2^k - 1 \}$ levert een getal $\in \{ 0, 1, ..., 2^{2k} - 2^{k+1} + 1 \}$
- multiplicatie van getallen $\in \{ -2^{k-1}, ..., 2^{k-1} - 1 \}$ levert een getal $\in \{ -2^{2k-2} + 2^{k-1}, ..., 2^{2k-2} \}$

$\rightarrow$ vaak resultaat te groot (carry/overflow)

Multiplicatie zonder overflow

- in de praktijk: multiplicatie van *k*-bits-getallen produceert bitpatroon met 2*k* bits
- niet-negatief of twee-complement maakt dan wel verschil
- b.v. 8086-assembly:
  - MUL CL AX := AL · CL (niet-negatief)
  - IMUL CL AX := AL · CL (twee-complement)

8-bits-factoren

16-bits-resultaat

Divisie

- computer rekent hier niet met restklassen
- divisie met rest
- twee divisie-instructies:
  omkering van de twee multiplicatie-instructies

Samenvatting

- een representatie is nodig
  om over getallen te praten
- binaire getallen(representatie)
- rekenregels voor binaire getallen
- beperkt geheugen → restklassen
- aanpassingen voor kleine getallen:
  - twee-complement

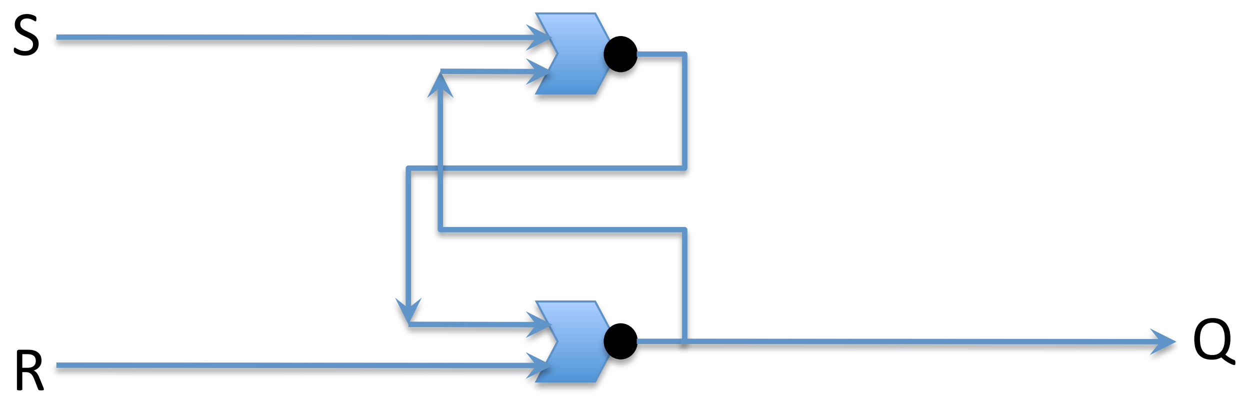
Geheugen

Herhaling: Gates/poorten

- grafische presentatie van Booleaanse functies
- elektronische schakelingen voor
  $\wedge$, $\vee$, $\neg$, NAND, NOR
  - a NAND b = $\neg$(a $\wedge$ b)
  - a NOR b = $\neg$(a $\vee$ b)
- algemene schakeling: PLA

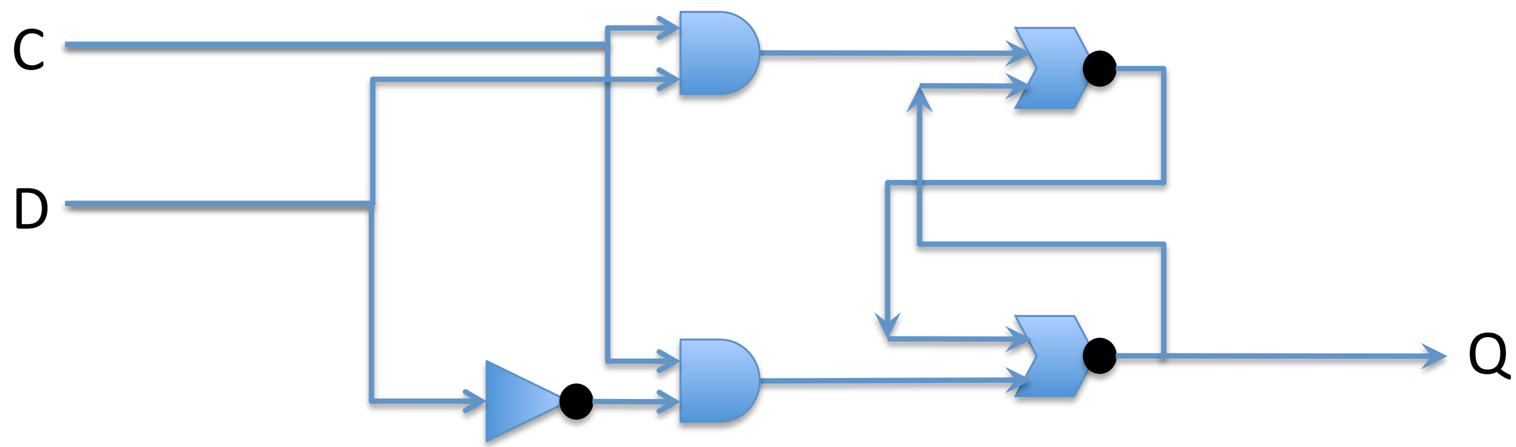
Circuit met terugkoppeling

- (NOR) SR Latch:



- S = Set, R = Reset

Level-triggered D-latch



- D = data, C = clock

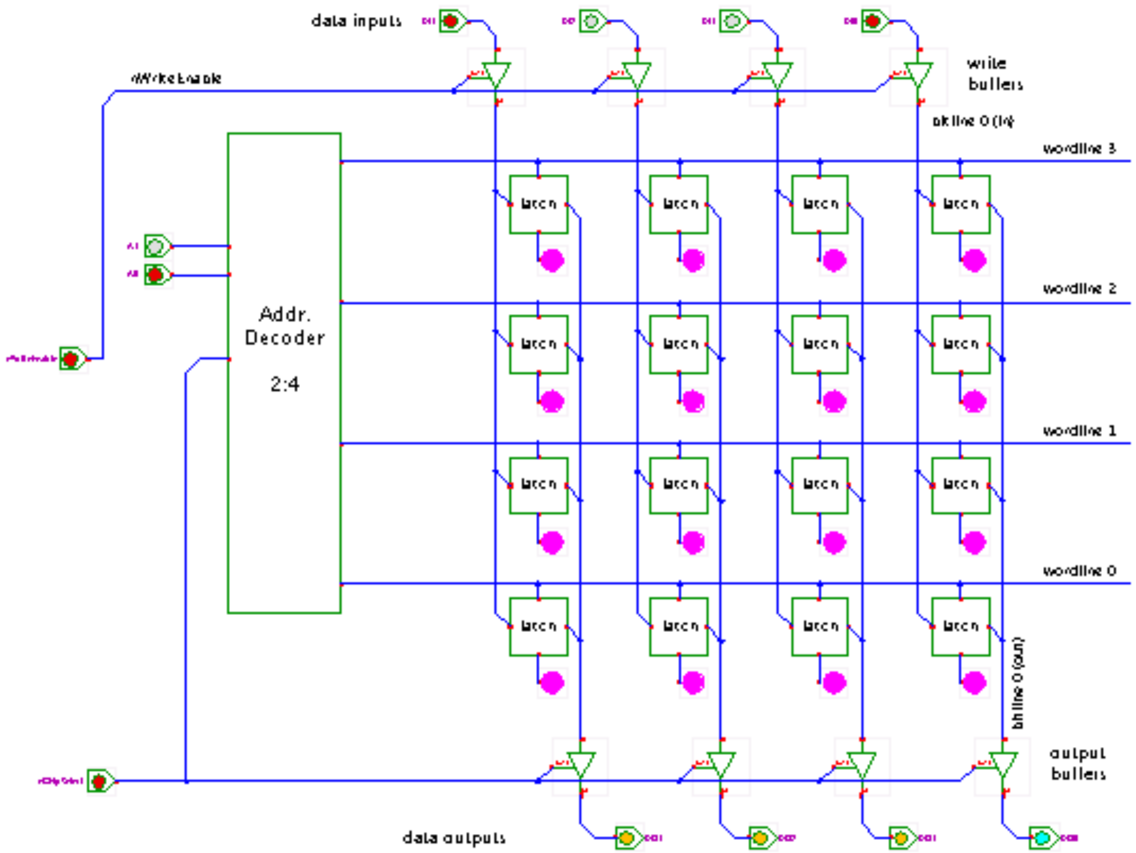
Meer latches

- clocked latch   level triggered
- clocked D latch (D = data)

- flipflop   edge triggered

Geheugen

- RAM / random access memory
  = verzameling flipflops met logica eromheen
  - het juiste adres berekenen
  - input daarheen schrijven
  - output daarvandaan lezen
  - alleen verwerken
    als deze RAM-chip gekozen wordt



HADES-Demo: RAM

http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de/applets/hades/webdemos/40-memories/40-ram/ram.html

Statisch en dynamisch RAM

- SRAM = echt opgebouwd uit flipflops
  - 6 transistoren per bit
- DRAM = dynamisch RAM
  - 1 transistor + 1 condensator per bit
  - condensator loopt langzaam leeg → refresh