Probabilistic Computational Tree Logic

Een case study voor het vak Talen en Automaten

Pim Heesterbeek, s0838284
januari 2012

1 Inleiding

Probabilistic Computational Tree Logic (PCTL) is een probabilistische logica, in 1994 geïntroduceerd door Hansson & Jonsson[1]. Het is een uitbreiding op de bekendere logica CTL. De logica doet uitspraken over Markovketens die voorzien zijn van bepaalde basisformules (*gelabelde Markovketens*). Een uitgebreidere beschrijving van PCTL, plus een onderzoek naar beslisbaarheid van model checking en vervulbaarheid is later dit jaar te vinden in mijn bachelorscriptie.

2 (Informele) beschrijving van de taal

Er zijn twee soorten formules die bestaan in de context van PCTL: padformules en toestandformules. Padformules zijn beweringen over paden in een gelabelde Markovketen en toestandformules zijn beweringen over knopen in gelabelde Markovketens. De logica PCTL bestaat uit alle toestandformules, dus we zullen ons hier alleen concentreren op de syntax van toestandformules, vanaf nu gewoon formules genoemd. Voor interpretatie en achtergrondinformatie verwijs ik graag naar [1], of later dit jaar naar mijn bachelorscriptie.

Definitie 1. *PCTL-formules zijn als volgt gedefiniëerd.*

1. *Er zijn oneindig veel basisformules $a_0, a_1, \ldots$ en elke basisformule a_i $(i \geq 0)$ is een PCTL-formule.*
2. *Als f een PCTL-formule is, dan is (f) een PCTL-formule.*
3. *Als f_1 en f_2 PCTL-formules zijn, dan zijn $f_1 \rightarrow f_2$ en $\neg f_1$ PCTL-formules.*[1]
4. *Als f_1 en f_2 PCTL-formule zijn, dan zijn $[f_1 \mathbf{U} f_2]^{\sim\rho}$ en $[\mathbf{X} f_1]^{\sim\rho}$ PCTL-formules, waarbij $\sim \in \{<, =\}$ en $\rho \in [0,1]$.* [2]

Voorbeelden van PCTL-formules zijn $\neg([\mathbf{X}a_1]^{<1})$ en $[(a_2 \rightarrow a_1)\mathbf{U}a_3]^{=0,5}$.

3 Regulier of niet?

PCTL is niet regulier, al is het maar vanwege de haakjes.

Bewijs: Stel PCTL is wel regulier. Zij dan $k \in \mathsf{N}$ het getal van het pomplemma en bekijk $z = ({}^k a_0)^k$. $z \in PCTL$, want het wordt verkregen door k keer regel 2 toe te passen op een basisformule uit regel 1.
Dan zou moeten gelden $z = uvw$ met $|uv| \leq k$, $|v| > 0$ en $uv^iw \in PCTL$ voor alle $i \geq 0$.
Omdat $|uv| \leq k$ moet gelden $u = ({}^l$, $v = ({}^m$ en $w = ({}^{k-m-l} a_0)^k$, met $l + m \leq k$ en $m > 0$.
Maar dan $uv^0w = ({}^{k-m} a_0)^k$ en $k - m \neq k$. Dat kan niet, want per constructie zijn er altijd evenveel ('s als)'s. Dit is een tegenspraak, dus PCTL is niet regulier.

[1] We beperken ons tot een minimaal aantal voegtekens, $f_1 \wedge f_2$ en $f_1 \vee f_2$ zijn hiermee te construeren.
[2] Wederom minimalistisch, $>, \geq, \leq$ *en* $\neq$ zijn te maken met $<$ en $=$.

4 Contextvrij of niet?

Volgens definitie 3.1.2 uit [2] bevat een contextvrije grammatica slechts eindig veel terminale symbolen en eindig veel regels. Omdat PCTL oneindig veel basisformules heeft, zou een grammatica van PCTL oneindig veel terminale symbolen moeten hebben. Dus PCTL is niet contextvrij.

Je zou je kunnen afvragen of PCTL wel contextvrij zou zijn, wanneer we ons beperken tot eindig veel basisformules. (In veel, maar zeker niet alle, praktische problemen is dat zo). Noteer daarom $PCTL_N$ voor de logica die N basisformules bevat en verder hetzelfde is gedefinieerd als PCTL. Nog steeds zit de oneindigheid in de weg, er zijn namelijk nog steeds oneindig veel regels omdat $\rho \in [0, 1]$.

Laten we dus, om toch een resultaat te krijgen, ons beperken tot $\rho \in \{0, 1\}$. (Dit heet het kwalitatieve fragment van $PCTL_N$, en noteren we even met $qPCTL_N$.)
Nu hebben we de logica genoeg verzwakt en is hij wel contextvrij. De syntax van $qPCTL_N$ wordt gegeven door de volgende regel:

$$S \rightarrow \qquad (S) \mid [S\mathbf{U}S]^{\sim\rho} \mid [\mathbf{X}S]^{\sim\rho} \mid S \rightarrow S \mid \neg S \mid a_0 \mid \ldots \mid a_N$$

Hierbij is zoals gezegd $\sim \in \{<, =\}$ en $\rho \in \{0, 1\}$. De regel is een directe kopie van de definitie van $qPCTL_N$-formules dus een expliciet bewijs lijkt me overbodig. Ook als we $\{0, 1\}$ zouden vervangen door een andere eindige deelverzameling van $[0, 1]$ is het resultaat contextvrij wegens bovenstaande regel.

Een paar voorbeelden. De afleiding van de formule $\neg[\mathbf{X}a_1]^{<1}$ is:

$$S \rightarrow \neg S \rightarrow \neg[\mathbf{X}S]^{<1} \rightarrow \neg[\mathbf{X}a_1]^{<1}$$

De afleiding van de formule $[(a_2 \rightarrow a_1)\mathbf{U}a_3]^{=0}$ is:

$$S \rightarrow [S\mathbf{U}S]^{=0} \rightarrow [(S)\mathbf{U}S]^{=0} \rightarrow [(S \rightarrow S)\mathbf{U}S]^{=0} \rightarrow [(a_2 \rightarrow S)\mathbf{U}S]^{=0} \rightarrow [(a_2 \rightarrow a_1)\mathbf{U}S]^{=0} \rightarrow [(a_2 \rightarrow a_1)\mathbf{U}a_3]^{=0}$$

Referenties

[1] Hans Hansson en Bengt Jonsson, *A logic for reasoning about time and reliability.* Formal aspects of computing 1994-6 p. 102-111

[2] Thomas A. Sudkamp, *Languages and machines* Tweede editie, 1998