Natuurlijke deductie met kwantoren

Engelbert Hubbers

Beweren en Bewijzen
Radboud Universiteit Nijmegen

1 juni 2011

Conjunctie introductie

- $$\frac{\Sigma \vdash \alpha \qquad \Sigma \vdash \beta}{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta} \wedge I$$

Conjunctie introductie

- $$\frac{\Sigma \vdash \alpha \qquad \Sigma \vdash \beta}{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta} \wedge I$$
- Beide nodige bewijzen samenvoegen tot één bewijs

- $$\frac{\Sigma \vdash \alpha \qquad \Sigma \vdash \beta}{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta} \wedge I$$
- Beide nodige bewijzen samenvoegen tot één bewijs
- De eindconclusie is sterker dan elk van de twee conclusies boven de streep

Conjunctie eliminatie

- $\dfrac{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Sigma \vdash \alpha} \wedge 1E$ en $\dfrac{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Sigma \vdash \beta} \wedge 2E$

Conjunctie eliminatie

- $\dfrac{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Sigma \vdash \alpha} \wedge 1E$ en $\dfrac{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Sigma \vdash \beta} \wedge 2E$
- Kennis toespitsen op één van twee zekere gevallen

Conjunctie eliminatie

- $\dfrac{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Sigma \vdash \alpha} \wedge 1E$ en $\dfrac{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Sigma \vdash \beta} \wedge 2E$
- Kennis toespitsen op één van twee zekere gevallen
- De eindconclusie is zwakker dan de conclusie boven de streep

Disjunctie introductie

- $\dfrac{\Sigma \vdash \alpha}{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta} \vee 1I$ en $\dfrac{\Sigma \vdash \beta}{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta} \vee 2I$

Disjunctie introductie

- $\dfrac{\Sigma \vdash \alpha}{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta} \vee 1I$ en $\dfrac{\Sigma \vdash \beta}{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta} \vee 2I$
- Kennis vervagen tot twee mogelijke gevallen

Disjunctie introductie

- $\dfrac{\Sigma \vdash \alpha}{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta} \vee 1I$ en $\dfrac{\Sigma \vdash \beta}{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta} \vee 2I$
- Kennis vervagen tot twee mogelijke gevallen
- De eindconclusie is zwakker dan de conclusie boven de streep

Disjunctie eliminatie

- $$\frac{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Sigma, \alpha \vdash \gamma \quad \Sigma, \beta \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma} \vee E$$

Disjunctie eliminatie

- $$\frac{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Sigma, \alpha \vdash \gamma \quad \Sigma, \beta \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma} \vee E$$
- Onderscheiding van beide mogelijke gevallen

Disjunctie eliminatie

- $$\frac{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Sigma, \alpha \vdash \gamma \quad \Sigma, \beta \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma} \vee E$$
- Onderscheiding van beide mogelijke gevallen
- De eindconclusie is sterker dan elk van de twee rechterconclusies boven de streep

$\wedge I$

Beide nodige bewijzen

$$\frac{\Sigma \vdash WT \qquad \Sigma \vdash ML}{\Sigma \vdash WT \wedge ML} \wedge I$$

$\wedge 1E, \wedge 2E$

Kennis toespitsen op één van twee zekere gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash JV \wedge PK}{\Sigma \vdash PK} \wedge 2E$$

$\vee 1I$, $\vee 2I$

Kennis vervagen tot twee mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash ML}{\Sigma \vdash ML \vee PL} \vee 1I$$

$\vee E$

Onderscheiding van beide mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash KT \vee \neg KT \qquad \Sigma, KT \vdash KG \qquad \Sigma, \neg KT \vdash KG}{\Sigma \vdash KG} \vee E$$

$\wedge I$

Beide nodige bewijzen

$$\frac{\Sigma \vdash WT\ \ t \qquad \Sigma \vdash ML\ \ t}{\Sigma \vdash WT\ \ t \wedge ML\ \ t}\wedge I$$

$\wedge 1E, \wedge 2E$

Kennis toespitsen op één van twee zekere gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash JV\ \ t \wedge PK\ \ t}{\Sigma \vdash PK\ \ t}\wedge 2E$$

$\vee 1I$, $\vee 2I$

Kennis vervagen tot twee mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash ML\ \ t}{\Sigma \vdash ML\ \ t \vee PL\ \ t}\vee 1I$$

$\vee E$

Onderscheiding van beide mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash KT\ \ t \vee \neg KT\ \ t \quad \Sigma, KT\ \ t \vdash KG\ \ t \quad \Sigma, \neg KT\ \ t \vdash KG\ \ t}{\Sigma \vdash KG\ \ t}\vee E$$

Nieuw domeinmodel

- $\dfrac{\Sigma \vdash JV\ \ t \wedge PK\ \ t}{\Sigma \vdash PK\ \ t} \wedge 2E$ gaat natuurlijk wel over predikaatlogica,

Nieuw domeinmodel

- $\dfrac{\Sigma \vdash JV\ \ t \wedge PK\ \ t}{\Sigma \vdash PK\ \ t} \wedge 2E$ gaat natuurlijk wel over predikaatlogica,
- maar de afleidingsstap behandelt beide gevallen als aparte proposities,

- $\dfrac{\Sigma \vdash JV\ \ t \wedge PK\ \ t}{\Sigma \vdash PK\ \ t} \wedge 2E$ gaat natuurlijk wel over predikaatlogica,
- maar de afleidingsstap behandelt beide gevallen als aparte proposities,
- dus op het niveau van de regels gebeurt hier niets specifiek voor predikaatlogica
- Nieuwe (hulp)predikaten nodig om iets interessanters te doen

naam	type	betekenis	afkorting
isKwadraat	$\mathbb{Z} \to B$	isKwadraat x: er is $y \in \mathbb{Z}$ is met $x = y^2$	K
isEven	$\mathbb{Z} \to B$	isEven x: er is $y \in \mathbb{Z}$ met $x = 2 * y$	E
isPositief	$\mathbb{Z} \to B$	isPositief x: $x > 0$	P

Overzichtsmatrix – andere voorbeelden

$\wedge I$

Beide nodige bewijzen

$$\frac{\Sigma \vdash E\ (0*2) \qquad \Sigma \vdash E\ (2*2)}{\Sigma \vdash E\ (0*2) \wedge E\ (2*2)}\ \wedge I$$

$\wedge 1E, \wedge 2E$

Kennis toespitsen op één van twee zekere gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash (P\ (\text{-}3*\text{-}3) \vee \text{-}3{=}0) \wedge (P\ (2*2) \vee 2{=}0)}{\Sigma \vdash (P\ (2*2) \vee 2{=}0)}\ \wedge 2E$$

$\vee 1I$, $\vee 2I$

Kennis vervagen tot twee mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash P(2*2)}{\Sigma \vdash P(2*2) \vee P(37*37)}\ \vee 1I$$

$\vee E$

Onderscheiding van beide mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash E\ 2 \vee E\ 3 \quad \Sigma, E\ 2 \vdash \exists z, K\ (z*z) \quad \Sigma, E\ 3 \vdash \exists z, K\ (z*z)}{\Sigma \vdash \exists z, K\ (z*z)}\ \vee E$$

Toelichting. . .

- Op de volgende pagina's worden transformaties gesuggereerd om van de regels voor de $\wedge$ en de $\vee$ te komen tot de regels voor de $\forall$ en $\exists$. Bedenk echter dat dit alleen maar informele beschrijvingen zijn hoe je van de regels voor $\forall$ en $\exists$ als oneindige varianten van de regels voor $\wedge$ en $\vee$ kunt zien.
- Uiteindelijk is het alleen maar van belang dat je
  - de regels met kwantoren exact leert kennen,
  - precies weet hoe je de specifieke voorwaarden moet checken en
  - bedenkt dat er allerlei symmetrieën en dualiteiten bestaan tussen deze regels.

$\wedge 1E$,$\wedge 2E$

Kennis toespitsen op één van twee zekere gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash (P\ (-3 * -3) \vee -3 = 0) \wedge (P\ (2 * 2) \vee 2 = 0)}{\Sigma \vdash (P\ (2 * 2) \vee 2 = 0)}\ \wedge 2E$$

$\forall E$

Kennis toespitsen op één van alle zekere gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash (P\ (-3 * -3) \lor -3 = 0) \land (P\ (2 * 2) \lor 2 = 0)}{\Sigma \vdash (P\ (2 * 2) \lor 2 = 0)} \land 2E$$

$\forall E$

Kennis toespitsen op één van alle zekere gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash \cdots \wedge (P\ (-3 * -3) \vee -3 = 0) \wedge \cdots \wedge (P\ (2 * 2) \vee 2 = 0) \wedge \ldots}{\Sigma \vdash P\ (2 * 2) \vee 2 = 0}\ ?$$

$\forall E$ – instantiatie

$\forall E$

Kennis toespitsen op één van alle zekere gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash \forall x, P\ (x * x) \lor x = 0}{\Sigma \vdash P\ (2 * 2) \lor 2 = 0}\ \forall E$$

$\forall E$

Kennis toespitsen op één van alle zekere gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash \forall x, P\ (x * x) \vee x = 0}{\Sigma \vdash P\ (x * x) \vee x = 0[x := 2]}\ \forall E$$

$\forall E$ – instantiatie

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}\,\forall E$$

$\forall E$ – instantiatie

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}\,\forall E$$
- Kennis toespitsen op één van alle zekere gevallen

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}{\Sigma \vdash \alpha[x := t]} \forall E$$
- Kennis toespitsen op één van alle zekere gevallen
- α is een formule, x een variabele en t een term
- Notatie $\alpha[x := t]$:
  - vervang alle vrije voorkomens van x door t

$\forall E$ – instantiatie

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}\,\forall E$$
- Kennis toespitsen op één van alle zekere gevallen
- α is een formule, x een variabele en t een term
- Notatie $\alpha[x := t]$:
  - vervang alle vrije voorkomens van x door t
- Voorwaarden
  - term t is een zeker speciaal geval (van het hier niet opgeschreven domein D)
  - vrije variabelen in t moeten ook vrij zijn in $\alpha[x := t]$.

$\forall E$ – instantiatie – voorbeelden

Bepaal of de $\forall E$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ z\ y}\ \forall E \tag{1}$$

Bepaal of de $\forall E$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ z\ y}\,\forall E \qquad \frac{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}\,\forall E \qquad (1)$$

Om deze vraag te beantwoorden, moeten we precies aangeven wat de concrete invulling is van de symbolen uit het sjabloon.

$$\begin{aligned} \alpha &= \exists y, R\ x\ y \\ x &= x \\ t &= z \\ \Sigma &= \forall x, \exists y, R\ x\ y \\ \alpha[x := t] &= \exists y, R\ z\ y \end{aligned}$$

$\forall E$ – instantiatie – voorbeelden

Vervolgens moeten we de voorwaarden gaan controleren:

- t is een term van het goede type; z is een variabele en dus ook een term en aangezien z een nog niet eerder gebruikte variabele is, is het type van z automatisch goed. (In Coq moet men expliciet vertellen dat z van type D is, zoals we zullen zien in de voorbeelden aan het eind van deze presentatie.)

Vervolgens moeten we de voorwaarden gaan controleren:

- t is een term van het goede type; z is een variabele en dus ook een term en aangezien z een nog niet eerder gebruikte variabele is, is het type van z automatisch goed. (In Coq moet men expliciet vertellen dat z van type D is, zoals we zullen zien in de voorbeelden aan het eind van deze presentatie.)
- De vrije variabelen van t moeten ook vrij zijn in $\alpha[x := t]$; ook dit klopt want de enige vrije variabele in z is z zelf en die komt vrij voor in $\exists y, R\ z\ y$.

Vervolgens moeten we de voorwaarden gaan controleren:

- t is een term van het goede type; z is een variabele en dus ook een term en aangezien z een nog niet eerder gebruikte variabele is, is het type van z automatisch goed. (In Coq moet men expliciet vertellen dat z van type D is, zoals we zullen zien in de voorbeelden aan het eind van deze presentatie.)
- De vrije variabelen van t moeten ook vrij zijn in $\alpha[x := t]$; ook dit klopt want de enige vrije variabele in z is z zelf en die komt vrij voor in $\exists y, R\ z\ y$.

Dus de regel is goed toegepast.

Zelfde vraag voor dit voorbeeld:

$$\frac{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ y\ y}\ \forall E \qquad (2)$$

$\forall E$ – instantiatie – voorbeelden

Zelfde vraag voor dit voorbeeld:

$$\frac{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ y\ y}\ \forall E \qquad \frac{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}\ \forall E \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \exists y, R\ x\ y \\ x &= x \\ t &= y \\ \Sigma &= \forall x, \exists y, R\ x\ y \\ \alpha[x := t] &= \exists y, R\ y\ y \end{aligned}$$

Zelfde vraag voor dit voorbeeld:

$$\frac{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ y\ y}\ \forall E \qquad \frac{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}\ \forall E \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \exists y, R\ x\ y \\
x &= x \\
t &= y \\
\Sigma &= \forall x, \exists y, R\ x\ y \\
\alpha[x := t] &= \exists y, R\ y\ y
\end{aligned}$$

Dus de regel is fout toegepast omdat de vrije variabele y uit de ingevulde term t nu opeens gebonden is.

$\vee 1I, \vee 2I$

Kennis vervagen tot twee mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash P(2 * 2)}{\Sigma \vdash P(2 * 2) \vee P(37 * 37)} \vee 1I$$

$\exists I$ – abstractie

$\exists I$

Kennis vervagen tot willekeurig geval

$$\frac{\Sigma \vdash P(2 * 2)}{\Sigma \vdash P(2 * 2) \vee P(37 * 37)} \vee 1 I$$

$\exists I$ – abstractie

$\exists I$

Kennis vervagen tot willekeurig geval

$$\frac{\Sigma \vdash P(2 * 2)}{\Sigma \vdash \dots \vee P(2 * 2) \vee \dots \vee P(37 * 37) \vee \dots} ?$$

$\exists I$

Kennis vervagen tot willekeurig geval

$$\frac{\Sigma \vdash P(2 * 2)}{\Sigma \vdash \exists x, P(x * x)}\ \exists I$$

$\exists I$

Kennis vervagen tot willekeurig geval

$$\frac{\Sigma \vdash P(x * x)[x := 2]}{\Sigma \vdash \exists x, P(x * x)}\ \exists I$$

$\exists I$ – ?

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}{\Sigma \vdash \exists x, \alpha} \exists I$$

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}{\Sigma \vdash \exists x, \alpha} \exists I$$
- Kennis vervagen tot willekeurig geval

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}{\Sigma \vdash \exists x, \alpha}\ \exists I$$
- Kennis vervagen tot willekeurig geval
- α is een formule, x een variabele en t een term
- Voorwaarden
  - term t is een zeker speciaal geval (van het hier niet opgeschreven domein D)
  - vrije variabelen in t moeten ook vrij zijn in $\alpha[x := t]$.

$\exists I$ – abstractie – voorbeelden

Bepaal of de $\exists I$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ y \vdash \forall y, R\ y\ y}{\forall x, \forall y, R\ y\ y \vdash \exists z, \forall y, R\ y\ z}\ \exists I \tag{3}$$

Bepaal of de $\exists I$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ y \vdash \forall y, R\ y\ y}{\forall x, \forall y, R\ y\ y \vdash \exists z, \forall y, R\ y\ z}\ \exists I \qquad \frac{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}{\Sigma \vdash \exists x, \alpha}\ \exists I \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \forall y, R\ y\ z \\
x &= z \\
t &= y \\
\Sigma &= \forall x, \forall y, R\ y\ y \\
\alpha[x := t] &= \forall y, R\ y\ y
\end{aligned}$$

Bepaal of de $\exists I$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ y \vdash \forall y, R\ y\ y}{\forall x, \forall y, R\ y\ y \vdash \exists z, \forall y, R\ y\ z}\ \exists I \qquad \frac{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}{\Sigma \vdash \exists x, \alpha}\ \exists I \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \forall y, R\ y\ z \\ x &= z \\ t &= y \\ \Sigma &= \forall x, \forall y, R\ y\ y \\ \alpha[x := t] &= \forall y, R\ y\ y \end{aligned}$$

Dus de regel is fout toegepast want de vrije variabele y uit de term t is niet vrij in $\forall y, R\ y\ y$.

$\exists I$ – abstractie – voorbeelden

Zelfde vraag voor dit voorbeeld:

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I \qquad (4)$$

$\exists I$ – abstractie – voorbeelden

Zelfde vraag voor dit voorbeeld:

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I \qquad \frac{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}{\Sigma \vdash \exists x, \alpha}\ \exists I \tag{4}$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \forall y, R\ y\ t \\ x & = & t \\ t & = & t \\ \Sigma & = & \forall x, \forall y, R\ y\ x \\ \alpha[x := t] & = & \forall y, R\ y\ t \end{array}$$

$\exists I$ – abstractie – voorbeelden

Zelfde vraag voor dit voorbeeld:

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I \qquad \frac{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}{\Sigma \vdash \exists x, \alpha}\ \exists I \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \forall y, R\ y\ t \\
x &= t \\
t &= t \\
\Sigma &= \forall x, \forall y, R\ y\ x \\
\alpha[x := t] &= \forall y, R\ y\ t
\end{aligned}$$

Dus de regel is goed toegepast want de enige vrije variabale uit t is t en die komt vrij voor in $\forall y, R\ y\ t$, maar deze keuze voor t is enigszins gevaarlijk omdat je nu niet ziet dat de t boven de streep een andere t is dan die onder de streep.

$\forall I$ – generalisatie

$\wedge I$

Beide nodige bewijzen

$$\frac{\Sigma \vdash E\ (0 * 2) \qquad \Sigma \vdash E\ (3 * 2)}{\Sigma \vdash E\ (0 * 2) \wedge E\ (3 * 2)} \wedge I$$

$\forall I$ – generalisatie

$\forall I$

Alle nodige bewijzen

$$\frac{\Sigma \vdash E\ (0 * 2) \qquad \Sigma \vdash E\ (3 * 2)}{\Sigma \vdash E\ (0 * 2) \wedge E\ (3 * 2)} \wedge I$$

$\forall I$ – generalisatie

$\forall I$

Alle nodige bewijzen

$$\frac{\ldots \quad \Sigma \vdash E\ (0 * 2) \quad \ldots \quad \Sigma \vdash E\ (3 * 2) \quad \ldots}{\Sigma \vdash \cdots \wedge E\ (0 * 2) \wedge \cdots \wedge E\ (3 * 2) \wedge \ldots}\ ?$$

$\forall I$ – generalisatie

$\forall I$

Alle nodige bewijzen

$$\frac{\ldots \quad \Sigma \vdash E\ (0 * 2) \quad \ldots \quad \Sigma \vdash E\ (3 * 2) \quad \ldots}{\Sigma \vdash \forall x, E\ (x * 2)}\ ?$$

$\forall I$ – generalisatie

$\forall I$

Eén willekeurig bewijs via een onbesproken geval

$$\frac{\ldots \quad \Sigma \vdash E\ (0*2) \quad \ldots \quad \Sigma \vdash E\ (3*2) \quad \ldots}{\Sigma \vdash \forall x, E\ (x*2)}\ ?$$

$\forall I$ – generalisatie

$\forall I$

Eén willekeurig bewijs via een onbesproken geval

$$\frac{\Sigma \vdash E\ (y * 2)}{\Sigma \vdash \forall x, E\ (x * 2)}\ \forall I$$

$\forall I$

Eén willekeurig bewijs via een onbesproken geval

$$\frac{\Sigma \vdash E\ (x * 2)[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, E\ (x * 2)}\ \forall I$$

$\forall I$ – generalisatie

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \alpha[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha} \forall I$$

$\forall I$ – generalisatie

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \alpha[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}\,\forall I$$
- Eén willekeurig bewijs via een onbesproken geval

$\forall I$ – generalisatie

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \alpha[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}\,\forall I$$
- Eén willekeurig bewijs via een onbesproken geval
- α is een formule, x en y zijn variabelen
- Voorwaarden
    - y is vrij in $\alpha[x := y]$
    - y is niet vrij in Σ
    - y is niet vrij in $\forall x, \alpha$

$\forall I$ – generalisatie – voorbeelden

Bepaal of de $\forall I$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I \tag{5}$$

Bepaal of de $\forall I$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I \qquad \frac{\Sigma \vdash \alpha[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}\ \forall I \tag{5}$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & B\ z \\ x & = & z \\ y & = & y \\ \Sigma & = & \forall x, A\ x \to B\ x \\ \alpha[x := y] & = & B\ y \end{array}$$

Bepaal of de $\forall I$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\forall I \qquad \frac{\Sigma \vdash \alpha[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}\forall I \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= B\ z \\ x &= z \\ y &= y \\ \Sigma &= \forall x, A\ x \to B\ x \\ \alpha[x := y] &= B\ y \end{aligned}$$

Omdat y vrij is in $B\ y$ geldt dat y vrij is in $\alpha[x := y]$. Omdat y niet voorkomt in $\forall x, A\ x \to B\ x$, komt y zeker niet vrij voor in Σ. En omdat y niet voor komt in $\forall z, B\ z$, komt y niet vrij voor in $\forall x, \alpha$.

$\forall I$ – generalisatie – voorbeelden

Bepaal of de $\forall I$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I \qquad \frac{\Sigma \vdash \alpha[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}\ \forall I \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= B\ z \\ x &= z \\ y &= y \\ \Sigma &= \forall x, A\ x \rightarrow B\ x \\ \alpha[x := y] &= B\ y \end{aligned}$$

Omdat y vrij is in $B\ y$ geldt dat y vrij is in $\alpha[x := y]$. Omdat y niet voorkomt in $\forall x, A\ x \rightarrow B\ x$, komt y zeker niet vrij voor in Σ. En omdat y niet voor komt in $\forall z, B\ z$, komt y niet vrij voor in $\forall x, \alpha$.

Dus de regel is goed toegepast!

Zelfde vraag voor dit voorbeeld:

$$\frac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ (y+2)}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I \tag{6}$$

$\forall I$ – generalisatie – voorbeelden

Zelfde vraag voor dit voorbeeld:

$$\frac{\forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash B\ (y+2)}{\forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash \forall z, B\ z}\forall I \qquad \frac{\Sigma \vdash \alpha[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}\forall I \qquad (6)$$

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & = & B\ z \\
x & = & z \\
y & = & (y+2) \\
\Sigma & = & \forall x, A\ x \rightarrow B\ x \\
\alpha[x := y] & = & B\ (y+2)
\end{array}$$

Zelfde vraag voor dit voorbeeld:

$$\frac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ (y+2)}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\forall I \qquad \frac{\Sigma \vdash \alpha[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}\forall I \qquad (6)$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & B\ z \\ x & = & z \\ y & = & (y+2) \\ \Sigma & = & \forall x, A\ x \to B\ x \\ \alpha[x := y] & = & B\ (y+2) \end{array}$$

Dus de regel is fout toegepast want $(y+2)$ is geen variabele!

$\forall I$ – generalisatie – voorbeelden

Zelfde vraag voor dit voorbeeld:

$$\frac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ (y+2)}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I \qquad \frac{\Sigma \vdash \alpha[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}\ \forall I \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= B\ z \\ x &= z \\ y &= (y+2) \\ \Sigma &= \forall x, A\ x \to B\ x \\ \alpha[x := y] &= B\ (y+2) \end{aligned}$$

Dus de regel is fout toegepast want $(y+2)$ is geen variabele!

Merk op dat variabelen altijd termen zijn, maar termen niet altijd variabelen.

$\vee E$

Onderscheiding van beide mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash E\ 2 \vee E\ 3 \quad \Sigma, E\ 2 \vdash \exists z, K\ (\text{z*z}) \quad \Sigma, E\ 3 \vdash \exists z, K\ (\text{z*z})}{\Sigma \vdash \exists z, K\ (\text{z*z})} \vee E$$

$\exists E$

Onderscheiding van alle mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash E\ 2 \vee E\ 3 \quad \Sigma, E\ 2 \vdash \exists z, K\ (\text{z*z}) \quad \Sigma, E\ 3 \vdash \exists z, K\ (\text{z*z})}{\Sigma \vdash \exists z, K\ (\text{z*z})} \vee E$$

$\exists E$

Onderscheiding van alle mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash \cdots \vee E\ 2 \vee E\ 3 \vee \ldots \quad \Sigma, \cdots \vdash \exists z, K\ (z * z) \quad \Sigma, \cdots \vdash \exists z, K\ (z * z) \quad \ldots}{\Sigma \vdash \exists z, K\ (z * z)}\ ?$$

$\exists E$

Onderscheiding van alle mogelijke gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash \exists x, E\ x \quad \Sigma, \dots \vdash \exists z, K\ (z * z) \quad \Sigma, \dots \vdash \exists z, K\ (z * z) \quad \dots}{\Sigma \vdash \exists z, K\ (z * z)}\ ?$$

$\exists E$

Onderscheiding van een willekeurig (onbesproken) geval

$$\frac{\Sigma \vdash \exists x, E\ x \quad \Sigma, E\ y \vdash \exists z, K\ (z * z)}{\Sigma \vdash \exists z, K\ (z * z)}\ \exists E$$

$\exists E$

Aanname van een willekeurig (onbesproken) geval

$$\frac{\Sigma \vdash \exists x, E\ x \qquad \Sigma, E\ y \vdash \exists z, K\ (z * z)}{\Sigma \vdash \exists z, K\ (z * z)}\ \exists E$$

$\exists E$ – ?

$\exists E$

Aanname van een willekeurig (onbesproken) geval

$$\frac{\Sigma \vdash \exists x, E\ x \qquad \Sigma, E\ x[x := y] \vdash \exists z, K\ (z * z)}{\Sigma \vdash \exists z, K\ (z * z)}\ \exists E$$

$\exists E$ – ?

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x := y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\,\exists E$$

$\exists E$ – ?

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x := y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\ \exists E$$
- Aanname van een willekeurig (onbesproken) geval

- Regel: $$\frac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x := y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\ \exists E$$
- Aanname van een willekeurig (onbesproken) geval
- α en γ zijn formules, x en y variabelen
- Voorwaarden
  - y is vrij in $\alpha[x := y]$
  - y is niet vrij in γ
  - y is niet vrij in Σ
  - y is niet vrij in $\exists x, \alpha$

$\exists E$ – ? – voorbeelden

Bepaal of de $\exists E$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x \wedge B\ x \quad \exists x, A\ x \wedge B\ x, \quad A\ y \wedge B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E \qquad (7)$$

$\exists E$ – ? – voorbeelden

Bepaal of de $\exists E$-regel hier correct is toegepast:

$$\dfrac{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x \wedge B\ x \qquad \exists x, A\ x \wedge B\ x,\quad A\ y \wedge B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E \quad (7)$$

$$\dfrac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x := y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\ \exists E$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= A\ x \wedge B\ x \\
\gamma &= \exists x, A\ x \\
x &= x \\
y &= y \\
\Sigma &= \exists x, A\ x \wedge B\ x \\
\alpha[x := y] &= A\ y \wedge B\ y
\end{aligned}$$

$\exists E$ – ? – voorbeelden

Bepaal of de $\exists E$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x \wedge B\ x \quad \exists x, A\ x \wedge B\ x, \quad A\ y \wedge B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E \quad (7)$$

$$\frac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x := y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\ \exists E$$

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & = & A\ x \wedge B\ x \\
\gamma & = & \exists x, A\ x \\
x & = & x \\
y & = & y \\
\Sigma & = & \exists x, A\ x \wedge B\ x \\
\alpha[x := y] & = & A\ y \wedge B\ y
\end{array}$$

Omdat y vrij is in $A\ y \wedge B\ y$, is y vrij in $\alpha[x := y]$. Omdat y niet voor komt in $\exists x, A\ x$, niet in $\exists x, A\ x \wedge B\ x$ en niet in $\exists x, A\ x \wedge B\ x$, komt y zeker niet vrij voor in γ, Σ en $\exists x, \alpha$.

$\exists E$ – ? – voorbeelden

Bepaal of de $\exists E$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x \wedge B\ x \qquad \exists x, A\ x \wedge B\ x,\quad A\ y \wedge B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E \quad (7)$$

$$\frac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x := y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\ \exists E$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= A\ x \wedge B\ x \\
\gamma &= \exists x, A\ x \\
x &= x \\
y &= y \\
\Sigma &= \exists x, A\ x \wedge B\ x \\
\alpha[x := y] &= A\ y \wedge B\ y
\end{aligned}$$

Omdat y vrij is in $A\ y \wedge B\ y$, is y vrij in $\alpha[x := y]$. Omdat y niet voor komt in $\exists x, A\ x$, niet in $\exists x, A\ x \wedge B\ x$ en niet in $\exists x, A\ x \wedge B\ x$, komt y zeker niet vrij voor in γ, Σ en $\exists x, \alpha$.

Dus de regel is goed toegepast.

$\exists E$ – ? – voorbeelden

Bepaal of de $\exists E$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\exists x, B\ x \vdash \exists x, B\ x \quad \exists x, B\ x, \quad B\ y \vdash B\ y}{\exists x, B\ x \vdash B\ y}\ \exists E \tag{8}$$

Bepaal of de $\exists E$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\exists x, B\ x \vdash \exists x, B\ x \quad \exists x, B\ x, \quad B\ y \vdash B\ y}{\exists x, B\ x \vdash B\ y}\,\exists E \tag{8}$$

$$\frac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x := y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\,\exists E$$

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & = & B\ x \\
\gamma & = & B\ y \\
x & = & x \\
y & = & y \\
\Sigma & = & \exists x, B\ x \\
\alpha[x := y] & = & B\ y
\end{array}$$

$\exists E$ – ? – voorbeelden

Bepaal of de $\exists E$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\exists x, B\ x \vdash \exists x, B\ x \qquad \exists x, B\ x, \quad B\ y \vdash B\ y}{\exists x, B\ x \vdash B\ y}\ \exists E \tag{8}$$

$$\frac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x := y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\ \exists E$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= B\ x \\
\gamma &= B\ y \\
x &= x \\
y &= y \\
\Sigma &= \exists x, B\ x \\
\alpha[x := y] &= B\ y
\end{aligned}$$

Omdat y wel vrij voor komt in $B\ y$, is niet voldaan aan de eis dat y niet vrij is in γ.

$\exists E$ – ? – voorbeelden

Bepaal of de $\exists E$-regel hier correct is toegepast:

$$\frac{\exists x, B\ x \vdash \exists x, B\ x \qquad \exists x, B\ x, \quad B\ y \vdash B\ y}{\exists x, B\ x \vdash B\ y}\ \exists E \tag{8}$$

$$\frac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x := y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\ \exists E$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= B\ x \\
\gamma &= B\ y \\
x &= x \\
y &= y \\
\Sigma &= \exists x, B\ x \\
\alpha[x := y] &= B\ y
\end{aligned}$$

Omdat y wel vrij voor komt in $B\ y$, is niet voldaan aan de eis dat y niet vrij is in γ.

Dus de regel is fout toegepast.

Deze laatste fout is waarschijnlijk de meest gemaakte op het tentamen en een kwestie van wishful thinking: we moeten $B\ y$ bewijzen en we weten dat voor een of andere x de bewering $B\ x$ waar is, dus dan nemen we maar onterecht aan dat die x wel precies onze gewenste y is...

Conclusie

$\forall I$

Eén willekeurig bewijs via een onbesproken geval

$$\frac{\Sigma \vdash \alpha[x := y]}{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}\ \forall I$$

$\forall E$

Kennis toespitsen op één van alle zekere gevallen

$$\frac{\Sigma \vdash \forall x, \alpha}{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}\ \forall E$$

$\exists I$

Kennis vervagen tot willekeurig geval

$$\frac{\Sigma \vdash \alpha[x := t]}{\Sigma \vdash \exists x, \alpha}\ \exists I$$

$\exists E$

Aanname van een willekeurig (onbesproken) geval

$$\frac{\Sigma \vdash \exists x, \alpha \qquad \Sigma, \alpha[x := y] \vdash \gamma}{\Sigma \vdash \gamma}\ \exists E$$

Tot nu toe zijn er alleen voorbeelden van enkele stappen getoond; hier enkele voorbeelden van complete bewijzen.
Laten we proberen of we de juist uitgevoerde stappen uit de vorige pagina's kunnen uitbreiden tot complete bewijzen.

Voorbeeld (1)

$$\frac{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ z\ y}\ \forall E$$

Uitbreiden tot een compleet bewijs vergt slechts één triviale stap.

Voorbeeld (1)

$$\frac{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ z\ y} \forall E$$

Uitbreiden tot een compleet bewijs vergt slechts één triviale stap.

$$\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ z\ y$$

```
Require Import BenB.

Variable D: Set.
Variable R: D->D->B.

(* Deze declaratie is nodig omdat Coq anders
niet weet dat z van type D is.*)
Variable z:D.

Theorem voorbeeld1:
(forall x, exists y, R x y)
->
(exists y, R z y).
Proof.
imp_i a1.
```

Voorbeeld (1)

$$\frac{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ z\ y}\ \forall E$$

Uitbreiden tot een compleet bewijs vergt slechts één triviale stap.

$$\frac{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ z\ y}\ \forall E$$

```
Require Import BenB.

Variable D: Set.
Variable R: D->D->B.

(* Deze declaratie is nodig omdat Coq anders
niet weet dat z van type D is.*)
Variable z:D.

Theorem voorbeeld1:
(forall x, exists y, R x y)
->
(exists y, R z y).
Proof.
imp_i a1.
all_e (forall x, exists y, R x y) z.
```

Voorbeeld (1)

$$\frac{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ z\ y}\ \forall E$$

Uitbreiden tot een compleet bewijs vergt slechts één triviale stap.

$$\dfrac{\dfrac{}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \forall x, \exists y, R\ x\ y}\ \text{hyp}}{\forall x, \exists y, R\ x\ y \vdash \exists y, R\ z\ y}\ \forall E$$

```
Require Import BenB.

Variable D: Set.
Variable R: D->D->B.

(* Deze declaratie is nodig omdat Coq anders
niet weet dat z van type D is.*)
Variable z:D.

Theorem voorbeeld1:
(forall x, exists y, R x y)
->
(exists y, R z y).
Proof.
imp_i a1.
all_e (forall x, exists y, R x y) z.
assumption.
Qed.
```

Voorbeeld (4)

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I$$

Uitbreiden tot een compleet bewijs kan en vergt twee extra stappen.

Voorbeeld (4)

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I$$

Uitbreiden tot een compleet bewijs kan en vergt twee extra stappen.

$$\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t$$

```
(* Deze declaratie van t is nodig omdat Coq
anders niet weet dat t van type D is
en dan mag de 'exi_i t' straks niet worden
gedaan.
*)
Variable t:D.

Theorem voorbeeld4:
(forall x:D, forall y:D, R y x)
->
(exists t:D, forall y:D, R y t)
.
Proof.
(* Merk op dat Coq de gebonden t heeft
hernoemd tot t0! *)
imp_i a1.
```

Voorbeeld (4)

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I$$

Uitbreiden tot een compleet bewijs kan en vergt twee extra stappen.

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I$$

```
(* Deze declaratie van t is nodig omdat Coq
anders niet weet dat t van type D is
en dan mag de 'exi_i t' straks niet worden
gedaan.
*)
Variable t:D.

Theorem voorbeeld4:
(forall x:D, forall y:D, R y x)
->
(exists t:D, forall y:D, R y t)
.
Proof.
(* Merk op dat Coq de gebonden t heeft
hernoemd tot t0! *)
imp_i a1.
exi_i t.
```

Voorbeeld (4)

$$\dfrac{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I$$

Uitbreiden tot een compleet bewijs kan en vergt twee extra stappen.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall x, \forall y, R\ y\ x}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}\ \forall E}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I$$

```
(* Deze declaratie van t is nodig omdat Coq
anders niet weet dat t van type D is
en dan mag de 'exi_i t' straks niet worden
gedaan.
*)
Variable t:D.

Theorem voorbeeld4:
(forall x:D, forall y:D, R y x)
->
(exists t:D, forall y:D, R y t)
.
Proof.
(* Merk op dat Coq de gebonden t heeft
hernoemd tot t0! *)
imp_i a1.
exi_i t.
all_e (forall x:D, forall y:D, R y x) t.
```

$$\frac{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I$$

Uitbreiden tot een compleet bewijs kan en vergt twee extra stappen.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall x, \forall y, R\ y\ x}\ \text{hyp}}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \forall y, R\ y\ t}\ \forall E}{\forall x, \forall y, R\ y\ x \vdash \exists t, \forall y, R\ y\ t}\ \exists I$$

```
(* Deze declaratie van t is nodig omdat Coq
anders niet weet dat t van type D is
en dan mag de 'exi_i t' straks niet worden
gedaan.
*)
Variable t:D.

Theorem voorbeeld4:
(forall x:D, forall y:D, R y x)
->
(exists t:D, forall y:D, R y t)
.
Proof.
(* Merk op dat Coq de gebonden t heeft
hernoemd tot t0! *)
imp_i a1.
exi_i t.
all_e (forall x:D, forall y:D, R y x) t.
assumption.
Qed.
```

Voorbeeld (5)

$$\frac{\forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

De stap is weliswaar goed toegepast, maar het bewijs is niet rond te krijgen omdat het niet lukt om het willekeurige geval $B\ y$ te bewijzen uit enkel de aanname $\forall x, A\ x \rightarrow B\ x$. Maar met de extra aanname $\forall s, A\ s$ erbij moet het wel lukken. Merk op dat y dan nog steeds onbesproken is.

Voorbeeld (5)

$$\frac{\forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

De stap is weliswaar goed toegepast, maar het bewijs is niet rond te krijgen omdat het niet lukt om het willekeurige geval $B\ y$ te bewijzen uit enkel de aanname $\forall x, A\ x \rightarrow B\ x$. Maar met de extra aanname $\forall s, A\ s$ erbij moet het wel lukken. Merk op dat y dan nog steeds onbesproken is.

$$\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash \forall z, B\ z$$

```
Variables A B: D->B.
Theorem voorbeeld5:
(forall s, A s)
->
(forall x, A x -> B x)
->
(forall z, B z).
Proof.
imp_i a1.
imp_i a2.
```

Voorbeeld (5)

$$\frac{\forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

De stap is weliswaar goed toegepast, maar het bewijs is niet rond te krijgen omdat het niet lukt om het willekeurige geval $B\ y$ te bewijzen uit enkel de aanname $\forall x, A\ x \rightarrow B\ x$. Maar met de extra aanname $\forall s, A\ s$ erbij moet het wel lukken. Merk op dat y dan nog steeds onbesproken is.

$$\frac{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash B\ y}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \rightarrow B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

```
Variables A B: D->B.
Theorem voorbeeld5:
(forall s, A s)
->
(forall x, A x -> B x)
->
(forall z, B z).
Proof.
imp_i a1.
imp_i a2.
```

```
all_i y.
(* Merk op dat Coq hier zelf heeft bepaald
dat y van type D is.*)
```

Voorbeeld (5)

$$\dfrac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

De stap is weliswaar goed toegepast, maar het bewijs is niet rond te krijgen omdat het niet lukt om het willekeurige geval $B\ y$ te bewijzen uit enkel de aanname $\forall x, A\ x \to B\ x$. Maar met de extra aanname $\forall s, A\ s$ erbij moet het wel lukken. Merk op dat y dan nog steeds onbesproken is.

$$\dfrac{\dfrac{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \qquad \forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \to B\ y}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}\ {\to} E}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

```
Variables A B: D->B.
Theorem voorbeeld5:
(forall s, A s)
->
(forall x, A x -> B x)
->
(forall z, B z).
Proof.
imp_i a1.
imp_i a2.
```

```
all_i y.
(* Merk op dat Coq hier zelf heeft bepaald
dat y van type D is.*)
imp_e (A y).
```

Voorbeeld (5)

$$\frac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

De stap is weliswaar goed toegepast, maar het bewijs is niet rond te krijgen omdat het niet lukt om het willekeurige geval $B\ y$ te bewijzen uit enkel de aanname $\forall x, A\ x \to B\ x$. Maar met de extra aanname $\forall s, A\ s$ erbij moet het wel lukken. Merk op dat y dan nog steeds onbesproken is.

$$\dfrac{\dfrac{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \qquad \dfrac{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \to \forall x, A\ x \to B\ x}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \to B\ y}\ \forall E}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}\ \to E}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

```
Variables A B: D->B.
Theorem voorbeeld5:
(forall s, A s)
->
(forall x, A x -> B x)
->
(forall z, B z).
Proof.
imp_i a1.
imp_i a2.
```

```
all_i y.
(* Merk op dat Coq hier zelf heeft bepaald
dat y van type D is.*)
imp_e (A y).
all_e (forall x : D, A x -> B x) y.
```

Voorbeeld (5)

$$\frac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

De stap is weliswaar goed toegepast, maar het bewijs is niet rond te krijgen omdat het niet lukt om het willekeurige geval $B\ y$ te bewijzen uit enkel de aanname $\forall x, A\ x \to B\ x$. Maar met de extra aanname $\forall s, A\ s$ erbij moet het wel lukken. Merk op dat y dan nog steeds onbesproken is.

$$\dfrac{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \qquad \dfrac{\dfrac{}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \to \forall x, A\ x \to B\ x}\ \text{hyp}}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \to B\ y}\ \forall E}{\dfrac{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I}\ \to E$$

```
Variables A B: D->B.
Theorem voorbeeld5:
(forall s, A s)
->
(forall x, A x -> B x)
->
(forall z, B z).
Proof.
imp_i a1.
imp_i a2.
```

```
all_i y.
(* Merk op dat Coq hier zelf heeft bepaald
dat y van type D is.*)
imp_e (A y).
all_e (forall x : D, A x -> B x) y.
assumption.
```

Voorbeeld (5)

$$\dfrac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

De stap is weliswaar goed toegepast, maar het bewijs is niet rond te krijgen omdat het niet lukt om het willekeurige geval $B\ y$ te bewijzen uit enkel de aanname $\forall x, A\ x \to B\ x$. Maar met de extra aanname $\forall s, A\ s$ erbij moet het wel lukken. Merk op dat y dan nog steeds onbesproken is.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall s, A\ s}}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y}\ \forall E \qquad \dfrac{\dfrac{}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \to \forall x, A\ x \to B\ x}\ \text{hyp}}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \to B\ y}\ \forall E}{\dfrac{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I}\ \to E$$

```
Variables A B: D->B.
Theorem voorbeeld5:
(forall s, A s)
->
(forall x, A x -> B x)
->
(forall z, B z).
Proof.
imp_i a1.
imp_i a2.
```

```
all_i y.
(* Merk op dat Coq hier zelf heeft bepaald
dat y van type D is.*)
imp_e (A y).
all_e (forall x : D, A x -> B x) y.
assumption.
all_e (forall s : D, A s) y.
```

Voorbeeld (5)

$$\frac{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I$$

De stap is weliswaar goed toegepast, maar het bewijs is niet rond te krijgen omdat het niet lukt om het willekeurige geval $B\ y$ te bewijzen uit enkel de aanname $\forall x, A\ x \to B\ x$. Maar met de extra aanname $\forall s, A\ s$ erbij moet het wel lukken. Merk op dat y dan nog steeds onbesproken is.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall s, A\ s}\ \text{hyp}}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y}\ \forall E \qquad \dfrac{\dfrac{}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \to \forall x, A\ x \to B\ x}\ \text{hyp}}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash A\ y \to B\ y}\ \forall E}{\dfrac{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash B\ y}{\forall s, A\ s,\ \forall x, A\ x \to B\ x \vdash \forall z, B\ z}\ \forall I}\ \to E$$

```
Variables A B: D->B.
Theorem voorbeeld5:
(forall s, A s)
->
(forall x, A x -> B x)
->
(forall z, B z).
Proof.
imp_i a1.
imp_i a2.
```

```
all_i y.
(* Merk op dat Coq hier zelf heeft bepaald
dat y van type D is.*)
imp_e (A y).
all_e (forall x : D, A x -> B x) y.
assumption.
all_e (forall s : D, A s) y.
assumption.
Qed.
```

Voorbeeld (7)

$$\frac{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x \wedge B\ x \quad \exists x, A\ x \wedge B\ x,\quad A\ y \wedge B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

Het bewijs is eenvoudig af te ronden.

Voorbeeld (7)

$$\frac{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x \wedge B\ x \quad \exists x, A\ x \wedge B\ x, \quad A\ y \wedge B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

Het bewijs is eenvoudig af te ronden.

$$\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x$$

```
Theorem voorbeeld7:
(exists x, A x /\ B x)
->
(exists x, A x).
Proof.
imp_i a1.
```

Voorbeeld (7)

$$\frac{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x \land B\ x \quad \exists x, A\ x \land B\ x,\ \ A\ y \land B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

Het bewijs is eenvoudig af te ronden.

$$\frac{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x \land B\ x \qquad\qquad \exists x, A\ x \land B\ x,\ \ A\ y \land B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

```
Theorem voorbeeld7:
(exists x, A x / B x)
->
(exists x, A x).
Proof.
imp_i a1.
```

```
exi_e (exists x : D, A x / B x) y a2.
```

Voorbeeld (7)

$$\frac{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x \land B\ x \quad \exists x, A\ x \land B\ x,\ \ A\ y \land B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

Het bewijs is eenvoudig af te ronden.

$$\frac{\dfrac{}{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x \land B\ x}\ \text{hyp} \qquad \exists x, A\ x \land B\ x,\ \ A\ y \land B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

```
Theorem voorbeeld7:
(exists x, A x / B x)
->
(exists x, A x).
Proof.
imp_i a1.
```

```
exi_e (exists x : D, A x / B x) y a2.
assumption.
```

Voorbeeld (7)

$$\dfrac{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x \wedge B\ x \quad \exists x, A\ x \wedge B\ x,\ \ A\ y \wedge B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

Het bewijs is eenvoudig af te ronden.

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x \wedge B\ x}\ \text{hyp} \quad \dfrac{\exists x, A\ x \wedge B\ x,\ \ A\ y \wedge B\ y \vdash A\ y}{\exists x, A\ x \wedge B\ x,\ \ A\ y \wedge B\ y \vdash \exists x, A\ x}\ \exists I}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

```
Theorem voorbeeld7:
(exists x, A x / B x)
->
(exists x, A x).
Proof.
imp_i a1.
```

```
exi_e (exists x : D, A x / B x) y a2.
assumption.
exi_i y.
(* Merk op dat dit de normale volgorde is:
eerst een exi_e en daarna een exi_i. *)
```

Voorbeeld (7)

$$\dfrac{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x \wedge B\ x \quad \exists x, A\ x \wedge B\ x,\ \ A\ y \wedge B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

Het bewijs is eenvoudig af te ronden.

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x \wedge B\ x}\ \text{hyp} \quad \dfrac{\dfrac{\exists x, A\ x \wedge B\ x,\ \ A\ y \wedge B\ y \vdash A\ y \wedge B\ y}{\exists x, A\ x \wedge B\ x,\ \ A\ y \wedge B\ y \vdash A\ y}\ \wedge 1E}{\exists x, A\ x \wedge B\ x,\ \ A\ y \wedge B\ y \vdash \exists x, A\ x}\ \exists I}{\exists x, A\ x \wedge B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

```
Theorem voorbeeld7:
(exists x, A x / B x)
->
(exists x, A x).
Proof.
imp_i a1.
```

```
exi_e (exists x : D, A x / B x) y a2.
assumption.
exi_i y.
(* Merk op dat dit de normale volgorde is:
eerst een exi_e en daarna een exi_i. *)
con_e1 (B y).
```

Voorbeeld (7)

$$\dfrac{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x \land B\ x \qquad \exists x, A\ x \land B\ x,\ \ A\ y \land B\ y \vdash \exists x, A\ x}{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

Het bewijs is eenvoudig af te ronden.

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x \land B\ x}\ \text{hyp} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x, A\ x \land B\ x,\ \ A\ y \land B\ y \vdash A\ y \land B\ y}\ \text{hyp}}{\exists x, A\ x \land B\ x,\ \ A\ y \land B\ y \vdash A\ y}\ \land 1E}{\exists x, A\ x \land B\ x,\ \ A\ y \land B\ y \vdash \exists x, A\ x}\ \exists I}{\exists x, A\ x \land B\ x \vdash \exists x, A\ x}\ \exists E$$

```
Theorem voorbeeld7:
(exists x, A x / B x)
->
(exists x, A x).
Proof.
imp_i a1.
exi_e (exists x : D, A x / B x) y a2.
assumption.
exi_i y.
(* Merk op dat dit de normale volgorde is:
eerst een exi_e en daarna een exi_i. *)
con_e1 (B y).
assumption.
Qed.
```